3°) On considère la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)dx$.

a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq 0$.

. f est continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$

en particulier sur $[0, \frac{\pi}{4}]$.

$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$f(x) = \tan^2(x) \geqslant 0$

Donc $f^n(x) = \tan^{2n}(x) \geqslant 0$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$

Ainsi,

$$U_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f^n(x)\, dx \geqslant 0$$